ЛИТОСФЕРА, 2010, № 6, с. 126–129

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 551.24.01

ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОГО ОРОГЕНА

© 2010 г. А. Н. Мезенцев

Уральский государственный горный университет
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
E-mail: office@ursmu.ru

Поступила в редакцию 09.10. 2009 г.

Предложено рассматривать массоперенос в верхней части земной коры как очень медленное течение изотропной вязкой жидкости. Получены двумерные интегральные уравнения такого течения, описывающие, в частности, движение свободной поверхности жидкости под действием силы тяжести.

Ключевые слова: *земная кора, вязкая жидкость, интегральные уравнения.*

1. При теоретическом рассмотрении многих вопросов геодинамики массоперенос, в т.ч. движение верхних частей земной коры, часто уподобляют течению очень вязкой (с коэффициентом вязкости не менее 10^{19} Па·с) жидкости [3, гл. 6]. Соответствующие уравнения движения достаточно сложны и получить их аналитические решения оказывается возможным лишь в относительно небольшом числе случаев (см., например, [1]). Поэтому особое значение приобретают численные методы решения динамических задач, в частности, метод интегральных уравнений. В [4, § 3.4] приведена система трехмерных интегральных уравнений Озеена для несжимаемой вязкой жидкости. В настоящей статье получены аналогичные им двумерные уравнения.

2. Течение изотропной изотермической вязкой жидкости в поле силы тяжести полностью описывается в [2, § 1.15] уравнениями непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho V = 0 \qquad (1)$$

и Навье-Стокса:

$$\rho\left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V\cdot\nabla)V\right] = -\mathrm{grad}P + \rho g + \mu\Delta V + \left(\frac{\mu}{3} + \varsigma\right)\mathrm{graddiv}\,V. \qquad (2)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, V – скорость течения, P – давление, g – ускорение силы тяжести, μ и ς – коэффициенты вязкости (ς часто называют второй вязкостью).

В случае жидкости с достаточно большими коэффициентами вязкости система уравнений (1), (2) может быть существенно упрощена.

Во-первых, жидкость, скорость течения которой мала по сравнению со скоростью звука в данной среде, можно считать несжимаемой [2, § 64]. Действительно, первое слагаемое в (1) имеет порядок величины ρ/ф, где ф – характерное время распространения какого-либо возмущения в пределах рассматриваемого объема среды; второе ~ ρV/*l*, где *l* – характерный линейный размер этого объема. Таким образом, отношение второго слагаемого к первому ~ Vф/*l*, т.е. равно отношению скорости течения к скорости звука. Если это отношение мало, что безусловно имеет место в задачах геодинамики, производная $\partial\rho/\partial t$ близка к нулю; можно поэтому положить: ρ = const, и уравнение непрерывности приобретает вид:

$$\mathit{div}\,V = 0. \qquad (1')$$

Одновременно можно опустить последнее слагаемое в правой части (2).

Далее, сравним левую часть (2) (т.н. инерциальную часть) с третьим слагаемым правой части [2, §§ 20, 24]. Первое слагаемое в левой части (2) по порядку величины равно ρV/ф , третье слагаемое в правой – ~ $\mu V/l^2$, их отношение ~ $\rho l^2/ф\mu$ для любых разумных значений *l* настолько мало, что величиной $\rho\cdot\partial V/\partial t$ всегда можно пренебречь. Порядок величины второго слагаемого в левой части (2) – $\rho V^2/l$, а его отношение к третьему слагаемому в правой части – ~ $\rho V l/\mu$ есть не что иное, как число Рейнольдса, которое в геодинамических задачах также много меньше единицы ввиду огромной величины коэффициента вязкости. Таким образом, в пренебрежении инерциальной частью, уравнение (2) имеет вид:

$$-\mathrm{grad}\,P + \rho g + \mu\Delta V = 0. \qquad (2')$$

Уравнение (2′) называется уравнением Стокса.

Для двумерных задач в декартовых координатах *x*, *z* (ось *x* направлена горизонтально, ось *z* – вертикально вверх) имеем:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{-\partial P^{(1)}}{\partial x_j} + \mu\Delta V_j = 0, \qquad (3)$$

где: j = 1, 2; $x_1 = x$, $x_2 = z$; $V_1 = V_x$; $V_2 = V_z$; $\Delta = \partial^2/\partial x_j^2$; под повторяющимися индексами здесь и далее подразумевается суммирование; введено избыточное (над гидростатическим) давление:

$$P^{(1)} = P + \rho gz.$$

Система (3) есть система трех уравнений относительно трех неизвестных функций V_x, V_z и $P^{(1)}$ и, следовательно, является замкнутой и полной.

3. Имея ввиду использование в дальнейшем формулы Грина, найдем два частных решения системы (3). Будем искать их в виде:

$$V_{jk} = \delta_{jk}\Delta\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}, \quad P_k = -\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta\psi, \qquad (4)$$

где ψ – скалярная функция расстояния, $r = \sqrt{(x-x_o)^2 + (z-z_o)^2}$ от произвольной точки (x, z) до некоторой точки отсчета $M_o(x_o, z_o)$. Путем непосредственной подстановки в первое из уравнений (3) убеждаемся, что:

$$\frac{\partial V_{jk}}{\partial x_j} = 0$$

для каждого *k*. Подстановка же (4) во второе уравнение системы (3) дает:

$$\Delta^2\psi = 0. \qquad (5)$$

Таким образом, вектор (V_{xk}, V_{zk}) и скаляр P_k являются решением системы (3), если только ψ есть решение бигармонического уравнения (5).

В полярных координатах r, φ с центром в точке M_o уравнение (5) имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right]\right\} = 0;$$

его общее решение:

$$\psi = ar^2\ln r + br^2 + c\ln r + d,$$

где a, b, c, d – произвольные постоянные. Положим,

$$a = 1/2,\ b = 1/4 - \frac{1}{2}\ln l_o,$$

где l_o – некоторый характерный размер рассматриваемого объема среды в горизонтальном направлении, c = d = 0 (такой выбор значений постоянных обусловлен исключительно простотой и симметрией следующих формул). Тогда частное решение (5):

$$\psi = \frac{1}{2}r^2\ln\frac{r}{l_o} - \frac{1}{4}r^2$$

и, согласно (4), два частных решения системы (3):

$$V_{xx} = \ln\frac{r}{l_o} + \frac{(z-z_o)^2}{r^2}, \quad V_{xz} = V_{zx} = -\frac{(x-x_o)(z-z_o)}{r^2},$$

$$V_{zz} = \ln\frac{r}{l_o} + \frac{(x-x_o)^2}{r^2},$$

$$P_x = -2\mu\frac{x-x_o}{r^2}, \quad P_z = -2\mu\frac{z-z_o}{r^2}. \qquad (4')$$

4. Пусть *S* – некоторая область на плоскости *xz*, ограниченная контуром *L*. Тогда, согласно второй формуле Грина, для любых функций *f* и *g*, регулярных внутри *S* и на ее границе:

$$\int_S [f\Delta g - g\Delta f]dS = \int_L \left[f\frac{dg}{dn} - g\frac{df}{dn}\right]dl. \qquad (6)$$

Здесь и далее символ $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по нормали к элементу dl контура L, внешней по отношению к S.

При построении интегральных уравнений для компонент вектора скорости положим:

$$f = V_j,\ g = V_{jk}.$$

Подставляя эти функции в (6) и используя вторые уравнения системы (3), находим:

$$\frac{1}{\mu}\int_S\left[V_j\frac{\partial P_k}{\partial x_j} - V_{jk}\frac{\partial P^{(1)}}{dx_j}\right]dS = \int_L\left[V_j\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} - V_{jk}\frac{\partial V_j}{\partial n}\right]dl. \qquad (6')$$

С учетом первого уравнения (3),

$$V_j\frac{\partial P_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(V_jP_k) - P_k\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(V_jP_k),$$

$$V_{jk}\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(V_{jk}P^{(1)}) - P^{(1)}\frac{\partial V_{jk}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(V_{jk}P^{(1)}),$$

а по формуле Гаусса для двумерного случая:

$$\int_S\frac{\partial}{\partial x_j}(V_jP_k)dS = \int_L V_jP_kn_jdl,$$

$$\int_S\frac{\partial}{\partial x_j}(V_{jk}P^{(1)})dS = \int_L V_{jk}P^{(1)}n_jdl,$$

где n_j – компоненты единичного вектора нормали к элементу *dl*. Подставляя эти выражения в левую часть (6’), получаем:

$$\int_L\left[V_{jk}\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - V_j\left(\mu\frac{\partial V_{jk}}{dn} - P_kn_j\right)\right]dl = 0. \qquad (7)$$

При построении интегрального уравнения для давления положим в (6):

$$f = V_j,\ g = P_j;$$

тогда:

$$\int_S[V_j\Delta P_j - P_j\Delta V_j]dS = \int_L\left[V_j\frac{\partial P_j}{\partial n} - P_j\frac{\partial V_j}{\partial n}\right]dl. \qquad (6'')$$

С учетом уравнений системы (3):

$$\Delta P_j = \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_k^2} = \mu\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta V_{kj} = \mu\Delta\frac{\partial V_{kj}}{\partial x_k} = 0,$$

$$P_j\Delta V_j = \frac{1}{\mu}P_j\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_jP^{(1)}\right) - P^{(1)}\frac{\partial P_j}{\partial x_j}\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_jP^{(1)}\right) - \mu P^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta V_j\right] = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_jP^{(1)}\right) -$$

$$- P^{(1)}\Delta\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_jP^{(1)}\right),$$

а по формуле Гаусса:

$$\frac{1}{\mu}\int_S\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_jP^{(1)}\right)dS = \frac{1}{\mu}\int_L P_jP^{(1)}n_jdl.$$

Подставляя эти выражения в левую часть (6″), получаем:

$$\int_L\left[P_j\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - \mu V_j\frac{\partial P_j}{\partial n}\right]dl = 0. \qquad (8)$$

5. Три уравнения (7), (8) образуют замкнутую систему интегральных уравнений относительно функции V_x,Vz и $P^{(1)}$, если подынтегральные выра-

жения регулярны, т.е. когда точка M_o лежит вне области S.

Если M_o находится внутри S, ее необходимо выделить из этой области. Для этого окружим M_o окружностью малого радиуса ε имея в виду в дальнейшем устремить этот радиус к нулю. Граница области *S* состоит теперь из двух частей: контура L и окружности ε. Соответственно, уравнения (7), (8) принимают вид:

$$\int_L \left[V_{jk}\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - V_j\left(\mu\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} - P_k n_j\right)\right]dl =$$

$$\int_\varepsilon \left[-V_{jk}\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) + V_j\left(\mu\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} - P_k n_j\right)\right]dl, \quad (9)$$

$$\int_L \left[P_j\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - \mu V_j\frac{\partial P_j}{\partial n}\right]dl =$$

$$= \int_\varepsilon \left[\mu V_j\frac{\partial P_j}{\partial n} - P_j\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right)\right]dl. \quad (10)$$

В интеграле по ε в (9) первое и второе слагаемые подынтегрального выражения имеют, согласно (4´), лишь логарифмические особенности в точке M_o; поэтому при $\varepsilon \to 0$ соответствующие интегралы обращаются в нуль. В третьем слагаемом подынтегрального выражения, как это следует из формул (4´):

$$\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} = -\frac{\partial V_{jk}}{\partial r} = -\frac{\delta_{jk}}{r};$$

тогда:

$$\int_\varepsilon \mu V_j\frac{\partial V_{jk}}{\partial n}dl = -\frac{\mu}{\varepsilon}\int_\varepsilon V_k r d\varphi = -2\pi\mu V_k(M_o)$$

при $\varepsilon \to 0$ (здесь и далее $V_k(M_o)$ – компонента скорости течения в точке M_o).

В четвертом слагаемом, как видно из (4´):

$$-V_j P_k n_j = -\frac{2\mu}{r}V_j n_k n_j$$

и, с учетом того, что:

$$\int_0^{2\pi} n_k n_j d\varphi = \pi\delta_{kj}, \quad (11)$$

находим:

$$-\int_\varepsilon V_j P_k n_j dl = -\frac{2\mu}{\varepsilon}\int_\varepsilon V_j n_k n_j r d\varphi = -2\pi\mu V_k(M_o)$$

при $\varepsilon \to 0$. Таким образом:

$$\int_L \left[V_{jk}\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - V_j\left(\mu\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} - P_k n_j\right)\right]dl =$$

$$= -4\pi\mu V_k(M_o). \quad (7')$$

В интеграле по ε в (10) степенную особенность в точке M_o имеют все три подынтегральные функции; поэтому вычислим соответствующие интегралы по отдельности. Интеграл от первого слагаемого, с учетом (4´), формулы Гаусса и первого уравнения системы (3):

$$\int_\varepsilon \mu V_j\frac{\partial P_j}{\partial n}dl = -2\mu^2\int_\varepsilon V_j\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{n_j}{r}\right)dl =$$

$$= \frac{2\mu^2}{\varepsilon^2}\int_\varepsilon V_j n_j dl = \frac{2\mu^2}{\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial V_j}{\partial x_j}dS_\varepsilon = 0,$$

где S_ε – круг радиусом ε. Аналогично, интеграл от второго слагаемого:

$$-\int_\varepsilon \mu P_j\frac{\partial V_j}{\partial n}dl = \frac{2\mu^2}{\varepsilon}\int_\varepsilon n_j\frac{\partial V_j}{\partial r}dl = \frac{2\mu^2}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial r}\right)dS_\varepsilon =$$

$$= \frac{2\mu^2}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\right)dS_\varepsilon = 0.$$

Интеграл от третьего слагаемого, с учетом формул (4´) и (11):

$$\int_\varepsilon P_j P^{(1)} n_j dl = \frac{2\mu}{\varepsilon}\int_\varepsilon P^{(1)} n_j n_j dl = 4\pi\mu P^{(1)}(M_o)$$

при $\varepsilon \to 0$ (здесь и далее $P^{(1)}(M_o)$ – избыточное давление в точке M_o). В результате

$$\int_L \left[P_j\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - \mu V_j\frac{\partial P_j}{\partial n}\right]dl = 4\pi\mu P^{(1)}(M_o). \quad (8')$$

Если точка M_o принадлежит контуру L, ее также необходимо изолировать. Для этого выделим целиком лежащую в области S полуокружность малого радиуса ε с центром в M_o. Граница области теперь состоит из двух частей: полуокружности и контура L за вычетом его малой части, лежащей внутри полуокружности. Полностью повторяя вычисления, приводящие к уравнениям (7´), (8´), находим, что в данном случае:

$$\int_L \left[V_{jk}\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - V_j\left(\mu\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} - P_k n_j\right)\right]dl =$$

$$= -2\pi\mu V_k(M_o), \quad (7'')$$

$$\int_L \left[P_j\left(\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - P^{(1)}n_j\right) - \mu V_j\frac{\partial P_j}{\partial n}\right]dl = 2\pi\mu P^{(1)}(M_o). \quad (8'')$$

6. Объединяя (7), (7´), (7″), (8), (8´), (8″) и возвращаясь от избыточного давления к полному, получаем систему интегральных уравнений для функций V_x, V_z, и *P* в окончательном виде:

$$\int_L \left\{ V_{jk}\left[\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - (P+\rho gz)n_j\right] - V_j\left(\mu\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} - P_k n_j\right)\right\}dl =$$

$$= -4\pi a\mu V_k(M_o),$$

$$\int_L \left\{ P_j\left[\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} - (P+\rho gz)n_j\right] - \mu V_j\frac{\partial P_j}{\partial n}\right\}dl = \quad (12)$$

$$= 4\pi a\mu[P(M_o) + \rho g z_o],$$

где $a = 1$, если M_o есть внутренняя точка области S; $a = 1/2$, если M_o принадлежит контуру L; $a = 0$, если точка M_o лежит вне S.

Система уравнений (12) должна быть дополнена соответствующими граничными условиями. На границе двух сред таковыми являются [2, § 15] условия равенства скоростей течения в первой и второй средах:

$$V_1 = V_2$$

и условие равенства величин сил взаимодействия сред:

$$n_j \sigma_{jk}^{(1)} = n_j \sigma_{jk}^{(2)},$$

где n_x, n_z – компоненты единичного вектора нормали к границе раздела,

$$\sigma_{jk} = -P\delta_{jk} + \mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right)$$

– компоненты тензора напряжений (несжимаемой) жидкости.

В ряде случаев граничные условия могут быть учтены непосредственно в системе уравнений (12), что позволяет существенно упростить ее. Так, если поверхность рассматриваемой среды является свободной, вдоль контура L должно быть:

$$\sigma_{jk} n_j = \left[-P\delta_{jk} + \mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j}\right)\right] n_k = 0,$$

тогда:

$$\mu\frac{\partial V_j}{\partial n} = \mu\frac{\partial V_j}{\partial x_l} n_l = P n_j - \mu\frac{\partial V_l}{\partial x_j} n_l$$

и (12) приобретает вид:

$$\int_L \left[V_{jk}\left(\mu\frac{\partial V_l}{\partial x_j} n_l + \rho g z n_j\right) + V_j\left(\mu\frac{\partial V_{jk}}{\partial n} - P_k n_j\right)\right] dl = 4\pi a V_k(M_o),$$

$$\int_L \left[P_j\left(\mu\frac{\partial V_l}{\partial x_j} n_l + \rho g z n_j\right) + \mu V_j \frac{\partial P_j}{\partial x_l} n_l\right] dl = -4\pi a\mu\left[P(M_o) + \rho g z_o\right]. \qquad (12')$$

В отличие от (12), в (12′) связаны между собой лишь два первых уравнения, содержащие неизвестные функции V_x и V_z; третье уравнение определяет давление P.

В сделанных приближениях интегральные уравнения (12), как и исходные дифференциальные уравнения (3), зависят от времени лишь параметрически. Поэтому для решения нестационарных задач, в частности, задачи о движении границы раздела сред, предлагается следующая схема расчета. Задается положение границы в некоторый момент времени t_o. В результате численного решения системы (12) определяется распределение скоростей течения в некотором счетном множестве точек этой границы. Находятся положения этих точек, а значит, и положение границы в момент времени $t_1 = t_o + \Delta t$, где Δt – выбранный заранее достаточно малый промежуток. Затем эта процедура повторяется необходимое число раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кормильцев В.В., Мезенцев А.Н., Иванов К.С., Ратушняк А.Н.* Изменение рельефа орогена как результат вязкого течения // Литосфера. 2008. № 1. С. 120–123.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. *Теркот Д., Шуберт Дж.* Геодинамика. М.: Мир, 1985. 730 с.
4. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

Рецензент К.С. Иванов

Two-dimensional integral equations of the viscous orogen's dynamic state

A.N. Mezentsev

Urals State Mining University

It is suggested to consider the mass transfer in the upper layer of the Earth's crust as a very slow flow of isotropic viscous liquid. The relevant two-dimensional integral equations are obtained; they describe, in particular, the movement of a free liquid surface under the gravity action.

Key words: *Earth's crust, viscous liquid, integral equations.*